Rozwiązania zadań z kolokwium
z Matematyki Obliczeniowej
w dniu 22 maja 2024

Zadanie 1.
O tym czy i z jakim wykładnikiem metoda iteracyjna $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ zbiega do punktu stałego x^* gładkiego przekształcenia Φ decyduje liczba zerujących się pochodnych tego przekształcenia w punkcie x^*. Jeśli bowiem $\Phi^{(j)}(x^*) = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, k-1$ i $\Phi^{(k)}(x^*) \neq 0$ to z rozwinięcia Taylora mamy

$$x_{n+1} - x^* = \Phi(x_n) - \Phi(x^*) \approx \Phi^{(k)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^k}{k!}.$$

Stąd mamy zbieżność lokalną do x^* z wykładnikiem k o ile $k \geqslant 2$, oraz z wykładnikiem 1 o ile $k = 1$ i dodatkowo $|\Phi'(x^*)| < 1$.

Zauważmy, że $f(x) = (x+1)^3(x-2)$.

W przypadku iteracji prostej mamy $\Phi(x) = x - \tau f(x)$, $\tau = 1/27$, a stąd

$$\Phi'(x) = 1 - \tau f'(x) = 1 - \tfrac{1}{27}(x+1)^2(4x-5).$$

Ponieważ $\Phi'(-1) = 1$, wykładnik zbieżności do -1 wynosi co najwyżej 1. Ale $\Phi'(x) > 1$ w otoczeniu -1 co oznacza, że odwzorowanie Φ nie jest zwężające i metoda nie jest nawet zbieżna liniowo. Z drugiej strony, $\Phi'(2) = 0$ oraz $\Phi''(2) = -\frac{2}{9}(x+1)(2x-1)\Big|_{x=2} = -2 \neq 0$. Zbieżność do 2 jest więc kwadratowa.

Dla metody Newtona mamy

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x+1)^3(x-2)}{3(x+1)^2(x-2) + (x+1)^3} \\ &= x - \frac{(x+1)(x-2)}{3(x-2) + (x+1)} = \frac{3x^2 - 4x + 2}{4x - 5},\end{aligned}$$

$$\Phi'(x) = \frac{6(2x^2 - 5x + 2)}{(4x-5)^2}, \quad \Phi''(x) = \frac{54}{(4x-5)^3}.$$

Ponieważ $\Phi'(-1) = 2/3$, zbieżność do -1 jest z wykładnikiem 1 (liniowa). Ponieważ $\Phi'(2) = 0$ i $\Phi''(2) = 2 \neq 0$, zbieżność do 2 jest kwadratowa.

Zadanie 2.
Rzeczony układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ formatu $nk \times nk$ można zapisać jako:

$$T\vec{x}_j + \sum_{i=j+1}^{k} \vec{H}x_i = \vec{b}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

gdzie $\vec{x}_j, \vec{b}_j \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)^T$, $\vec{b} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)^T$. Układ można więc rozwiązać rozwiązując kolejno dla $j = k, k-1, \ldots, 2, 1$ układy z macierzą trójdiagonalną T; mianowicie

$$T\vec{x}_j = \vec{b}_j - H\left(\sum_{i=j+1}^{k} \vec{x}_i\right).$$

W kroku j znamy już wektory $\vec{x}_i$ dla $j+1 \leqslant i \leqslant k$. Ich dodanie kosztuje $O(nk)$, a pomnożenie przez macierz H (jest to macierz rzutu na podprzestrzeń prostopadłą do $\vec{v}$) stosując wzór

$H\vec{z} = \vec{z} - \vec{v}s$, $s = \vec{v}^T\vec{z}$, oraz odjęcie od $\vec{b}_j$ kosztuje $O(n)$. Następnie rozwiązanie układu z macierzą T i znaną już prawą stroną kosztuje $O(n)$. Jeden krok kosztuje więc $O(nk)$, a wobec tego, że mamy k kroków to cały algorytm kosztuje $O(nk^2)$.

Zadanie 3.
Pierwsze odbicie $H_1 = I - \vec{u}_1\vec{u}_1^T/\gamma_1$ przeprowadza pierwszą kolumnę macierzy, tzn. wektor $\vec{a}_1 = (1, -1, -1, 1)^T$ na kierunek wektora $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^4$. Stosując gotowe wzory mamy: $\|\vec{a}_1\|_2 = 2$, $u_{1,1} = a_{1,1} \pm \|\vec{a}\|_2 = 1 + 2 = 3$ (plus, bo $a_{1,1} > 0$), a więc

$$\vec{u}_1 = (3, -1, -1, 1)^T, \quad \gamma_1 = \|\vec{a}_1\|_2^2 + |a_{1,1}|\|\vec{a}\|_2 = 6.$$

Dalej mamy $H_1\vec{a}_1 = -\|\vec{a}_1\|\vec{e}_1 = (-2, 0, 0, 0)^T$, a mnożenie przez drugą kolumnę $\vec{a}_2$ macierzy A daje

$$H_1\vec{a}_2 = \vec{a}_2 - \vec{u}_1(\vec{u}_1^T\vec{a}_2)/\gamma_1 = \vec{a}_2 - \vec{u}_1(-6) = (3, 2, -1, -2)^T.$$

Drugie odbicie $H_2 = I - \vec{u}_2\vec{u}_2^T/\gamma_2$, po "obcięciu" pierwszej współrzędnej, przeprowadza wektor $((H_1\vec{a}_2)_i)_{i=2}^4 = (2, -1, -2)^T$ na kierunek $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^3$. Mamy: $\vec{u}_{2,2} = 5$, a więc

$$\vec{u}_2 = (0, 5, -1, -2)^T, \quad \gamma_2 = 15.$$

Ostatecznie dostajemy macierz trójkątną górną

$$R = (r_{i,j}) = H_2H_1A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aby rozwiązać LZNK, najpierw obliczamy wektor $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$ aplikując odbicia do wektora $\vec{b}$. Otrzymujemy

$$H_1\vec{b} = \vec{b} - \vec{u}_1(\vec{u}_1^T\vec{b})/\gamma_1 = (10, 2, -1, -11)^T, \quad H_2H_1\vec{b} = (10, -9, 6/5, -21/5)^T.$$

Rozwiązanie $\vec{x}^*$ dostajemy rozwiązując układ kwadratowy z macierzą trójkątną górną $(r_{i,j})_{i,j=1}^2$ i prawą stroną $(c_1, c_2)^T$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Stąd $\vec{x}^* = (-1/2, 3)^T$, a residuum

$$\|\vec{b} - A\vec{x}^*\|_2 = \sqrt{c_3^2 + c_4^2} = \sqrt{(6/5)^2 + (-33/5)^2} = \sqrt{1125}/5 = 3\sqrt{5}.$$

Zadanie 4.
Wiemy, że metoda potęgowa zbiega do pojedynczego wektora wtedy i tylko wtedy gdy największa co do modułu wartość własna jest nieujemna (przy czym może być wielokrotna). Stąd implementacja Asi nie musi zawierać błędu, a jeśli nie to największa co do modułu wartość własna macierzy jest dodatnia.

Podobnie, nie można stwierdzić, że implementacja Basi jest błędna. A jeśli jest prawidłowa to znaczy, że istnieją dodatnia i ujemna dominujące wartości własne. W szczególności, macierz nie jest określona, ani dodatnio, ani ujemnie.

Podobnie do przypadku Basi, nie można stwierdzić błędu w implementacji Cesi. Fakt, że wektory graniczne są prostopadłe nie ma tutaj znaczenia.